Глава 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ЦИФРОВОЙ МИКРОЭЛЕКТРОНИКИ

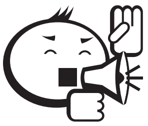
3.1 Арифметические коды

В цифровых системах применяют специальные коды для представления чисел.

Основной арифметической операцией, технически реализуемой в цифровой электронике, является операция арифметического сложения. Для выполнения операции алгебраического сложения применяют специальные коды представления чисел со знаком: прямой, обратный и дополнительный. При этом один из разрядов разрядной сетки (чаще всего старший) предназначен для отображения знака числа, причем для положительных чисел в знаковом разряде устанавливается цифра 0, а для отрицательных — цифра 1. Прямой, обратный и дополнительный коды положительных чисел совпадают. Прямой код отрицательных чисел содержит цифру 1 в знаковом разряде и двоичное значение модуля числа в остальных разрядах разрядной сетки. Для получения обратного кода отрицательного числа необходимо проинвертировать цифры всех разрядов прямого кода, кроме знакового разряда (единицы заменить нулями, а нули — единицами). Перевод отрицательного числа из обратного кода в прямой осуществляется по тому же правилу, что и из прямого кода в обратный. Для получения дополнительного кода отрицательных чисел необходимо выполнить арифметическое сложение обратного кода с числом 1, то есть проинвертировать все разряды прямого кода, кроме знакового разряда, и арифметически добавить число 1. Перевод отрицательного числа из дополнительного кода в прямой осуществляется по тому же правилу, что и из прямого кода в дополнительный.

Сложение чисел с одинаковыми знаками достаточно просто реализуется в прямом коде: арифметически складываются модули чисел, а в знаковый разряд суммы устанавливается цифра, соответствующая знакам слагаемых. Значительно более сложно реализовать в прямом коде операцию сложения чисел с разными знаками:

необходимо определять большее по модулю число, выполнять вычитание и присваивать разности знак большего по модулю числа. Поэтому в цифровой электронике операция алгебраического сложения сводится к операции арифметического сложения с использованием дополнительного кода.



При алгебраическом сложении с использованием дополнительного кода арифметически суммируются дополнительные коды слагаемых, включая знаковые разряды, которые при этом рассматриваются как обычные старшие разряды чисел. При возникновении переноса из знакового разряда единица переноса отбрасывается. Результат сложения формируется в дополнительном коде, если разрядная сетка не переполняется, а его знак определяется получившимся значением знакового разряда.

Операция вычитания с использованием дополнительного кода сводится к операции алгебраического сложения. При этом предварительно преобразуется вычитаемое: инвертируются все его разряды, включая знаковый разряд, и арифметически добавляется единица.

Например, определим разность чисел 22 и 13 при 8-разрядной сетке. Так как уменьшаемое и вычитаемое — положительные числа, их дополнительные двоичные коды совпадают с прямыми: $22_{10} = 00010110_2$, $13_{10} = 00001101_2$. Инвертируя все разряды вычитаемого, включая знаковый разряд, и арифметически добавляя 1, получим

$$00001101 \longrightarrow \begin{array}{r} 11110010 \\ +\quad 1 \\ \hline 11110011 \end{array}$$

Арифметически суммируя коды 00010110 и 11110011, найдем

$$\begin{array}{r} +\; 00010110 \\ 11110011 \\ \hline 1\boxed{0}0001001 \end{array}$$

разность в дополнительном коде

знаковый разряд

Значение знакового разряда равно 0, поэтому получено положительное число $00001001_2 = 9_{10}$.

Для вычитания числа 22 из числа 13 инвертируем все разряды, включая знаковый разряд, числа $22_{10} = 00010110_2$ и арифметически добавляем единицу. В результате получаем

$$00010110 \longrightarrow \begin{array}{r} 11101001 \\ +\quad 1 \\ \hline 11101010 \end{array}$$

Арифметически суммируя коды 00001101 и 11101010, найдем

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0 \end{array} \\
\hline
\boxed{1}\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,1
\end{array}
\quad \text{— разность в дополнительном коде}
$$

$\boxed{1}$ — знаковый разряд

Поскольку значение знакового разряда равно 1, получено отрицательное число, представленное в дополнительном коде. Переводя разность в прямой код, определим

$$
1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,1 \longrightarrow
\begin{array}{r}
1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \\
+\qquad\qquad 1 \\
\hline
1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1
\end{array},
$$

то есть $10001001_2 = -9_{10}$.

В цифровых устройствах обрабатывается и хранится не только числовая, но и алфавитно-цифровая информация, содержащая цифры, буквы, математические и другие символы, которые представляются соответствующими двоичными кодами.

При взаимодействии цифровых устройств с оператором вводимая и выводимая числовая информация зачастую должна быть представлена в десятичной системе счисления, тогда как ее обработка и хранение осуществляется в форме двоичных кодов. Однако перевод десятичных чисел в двоичную систему счисления и обратно требует использования достаточно сложных схем преобразователей и занимает относительно долгое время. В связи с этим для представления в цифровых системах десятичных чисел используются специальные двоично-десятичные коды.

В двоично-десятичном коде 8–4–2–1 каждая цифра десятичного числа представляется соответствующим двоичным четырехразрядным числом (двоичной *тетрадой*). Например,

$$
\begin{array}{ccc}
5 & 1 & 7 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
0101 & 0001 & 0111
\end{array}
= 010100010111_{2/10}
$$

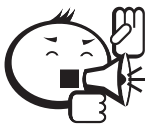
Код 8–4–2–1 удобен для перевода в цифровых устройствах чисел из десятичной системы в двоичную систему и обратно, поскольку является естественным представлением десятичных чисел в двоичной системе. Этот код аддитивен, то есть сумма двоичных кодов цифр есть двоичный код их суммы. Однако использование этого кода сопряжено с трудностью обнаружения переноса в следующий десятичный разряд, а также со сложностью перехода к обратным и дополнительным кодам.

3.2 Функции алгебры логики и их основные свойства

Булевой функцией (БФ) называется функция, аргументами которой являются логические переменные, а сама функция, как и ее аргументы, может принимать только два значения: «истинно» — 1 или «ложно» — 0. Если булева функция зависит от L аргументов, то ее аргументы образуют 2^L логических (двоичных) наборов значений, которые нумеруются от 0 до $2^L - 1$. На каждом наборе аргументов функция может принимать значение 0 или 1. Таким образом, булева функция от L аргументов может быть полностью задана таблицей, содержащей 2^L строк, в которых записываются все возможные двоичные наборы значений аргументов и указаны значения функции на каждом наборе. Такая таблица называется таблицей истинности. Пример табличного задания функции $y(x_1, x_2, x_3)$ представлен в табл. 3.1.

Таблица 3.1 – Таблица истинности логической функции $y(x_1, x_2, x_3)$

Номер набора	x_1	x_2	x_3	$y(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1



Значения булевой функции могут быть заданы не на всех 2^L возможных наборах значений аргументов. Такие булевы функции называют *неполностью определенными* или *частичными*.

Для наборов значений аргументов, на которых частичная функция не определена, в столбце значений функции таблицы истинности указывается знак «x». Частичная булева функция может быть доопределена путем подстановки на место со знаком «x» 0 либо 1. Таким образом, если функция не определена на k наборах значений аргументов, то путем ее возможных доопределений можно получить 2^k различных полностью определенных булевых функций.

Полностью определенная булева функция $y(x_1, \ldots, x_l, \ldots x_L)$ существенно зависит от аргумента x_l, если выполняется соотношение $y(x_1, \ldots, 0, \ldots x_L) \neq y(x_1, \ldots, 1, \ldots x_L)$.

В противном случае функция фактически не зависит от аргумента x_l, который является ее фиктивным аргументом.

Важное значение в алгебре логики играют булевы функции, называемые *конституентой единицы (минтермом)* и *конституентой нуля (макстермом)*.

. . . .

Конституента единицы (минтерм) от L аргументов *— это булева функция, которая принимает единичное значение только на одном логическом наборе значений аргументов, а на остальных* $(2L-1)$ *логических наборах обращается в нуль.*

. . . .

. . . .

Конституента нуля (макстерм) от L аргументов *— это булева функция, которая принимает нулевое значение только на одном логическом наборе значений аргументов, а на остальных* $(2L-1)$ *логических наборах обращается в единицу.*

. . . .

Число различных булевых функций от L аргументов конечно и равно 2^{2^L}.

Рассмотрим более подробно булевы функции, имеющие наиболее важное практическое значение.

Булева *функция инверсия*, *отрицание x* или *логическое* НЕ (читается «не x») зависит от одного аргумента, принимает значение логической единицы, когда аргумент равен логическому нулю, и наоборот. Запись функции имеет вид $f=\overline{x}$.

Булева *функция «дизъюнкция»* (*функция* «ИЛИ», *логическое сложение*) в общем случае может зависеть от L аргументов и представляет собой логическую функцию типа конституенты нуля, которая обращается в нуль только в том случае, когда все аргументы равны нулю, и в единицу на всех остальных наборах аргументов. Запись дизъюнкции от L аргументов имеет вид:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_L)=x_1+x_2+\ldots+x_L. \tag{3.1}$$

Булева *функция «конъюнкция»* (*функция* «И»*, логическое умножение*) в общем случае может зависеть от L аргументов и представляет собой логическую функцию типа конституенты единицы, которая обращается в единицу только в том случае, когда все аргументы равны единице, и в нуль на всех остальных наборах аргументов. Запись конъюнкции от L аргументов имеет вид:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_L)=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_L. \tag{3.2}$$

Булева *функция «стрелка Пирса»* (*функция Пирса, функция* «ИЛИ-НЕ») в общем случае может зависеть от L аргументов и представляет собой логическую функцию типа конституенты единицы, которая обращается в единицу только в том случае, когда все аргументы равны нулю, и в нуль на всех остальных наборах аргументов. Запись функции Пирса от L аргументов имеет вид:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_L)=\overline{x_1+x_2+\ldots+x_L}. \tag{3.3}$$

Булева *функция «штрих Шеффера»* (*функция Шеффера, функция* «И-НЕ») в общем случае может зависеть от L аргументов и представляет собой логическую функцию типа конституенты нуля, которая обращается в нуль только в том случае, когда все аргументы равны единице, и в единицу на всех остальных наборах аргументов. Запись функции Шеффера от L аргументов имеет вид:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_L)=\overline{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_L}. \tag{3.4}$$

Булева *функция «исключающее* ИЛИ*»* (*функция сложения по модулю 2*) в общем случае может зависеть от L аргументов и представляет собой логическую функцию, которая обращается в единицу, если нечетное количество аргументов принимает единичное значение, и в нуль, если единичное значение принимают четное количество аргументов. Запись функции «исключающее ИЛИ» от L аргументов имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_L) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_L. \tag{3.5}$$

3.3 Основные законы алгебры логики

Свойства дизъюнкции, конъюнкции и функции «исключающее ИЛИ*».*

Функции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством *коммутативности*:

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1, \qquad x_1 x_2 = x_2 x_1, \qquad x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1.$$

Функции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством *ассоциативности*:

$$(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$(x_1 x_2)\ x_3 = x_1\ (x_2 x_3) = x_1 x_2 x_3,$$

$$(x_1 \oplus x_2)\ \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,$$

что позволяет удалять скобки.

Конъюнкция *дистрибутивна* относительно дизъюнкции и относительно функции «исключающее ИЛИ»:

$$x_1\ (x_2 + x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3, \qquad x_1\ (x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3,$$

что позволяет раскрывать скобки в более сложных булевых выражениях и выносить общий множитель за скобки.

Дизъюнкция *дистрибутивна* относительно конъюнкции:

$$x_1 + (x_2 x_3) = (x_1 + x_2)\,(x_1 + x_3)\,.$$

Конъюнкция и дизъюнкция обладают свойством *идемпотентности*:

$$x + x = x, \qquad xx = x,$$

откуда следует, что в булевых выражениях нет ни коэффициентов, ни степеней.

Теорема де Моргана (теорема двойственности).

Инверсия конъюнкции есть дизъюнкция инверсий; инверсия дизъюнкции есть конъюнкция инверсий:

$$\overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}, \qquad \overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}.$$

С применением метода математической индукции свойства конъюнкции, дизъюнкции, функции «исключающее ИЛИ», а также теорему де Моргана, сформулированные для минимального числа переменных, могут быть распространены на произвольное число переменных.

Теорема поглощени:

$$x_1 + x_1x_2 = x_1 \text{ — дизъюнктивная форма,}$$
$$x_1\left(x_1 + x_2\right) = x_1 \text{ — конъюнктивная форма.}$$

Теорема склеивания:

$$x_1x_2 + x_1\overline{x_2} = x_1 \text{ — дизъюнктивная форма,}$$
$$\left(x_1 + x_2\right)\left(x_1 + \overline{x_2}\right) = x_1 \text{ — конъюнктивная форма.}$$

Теоремы одной переменной:

$$\begin{array}{llll} x + 0 = x & x \cdot 0 = 0 & x \oplus 0 = x & \overline{\overline{x}} = x \\ x + 1 = 1 & x \cdot 1 = x & x \oplus 1 = \overline{x} & \\ x + x = x & x \cdot x = x & x \oplus x = 0 & \\ x + \overline{x} = 1 & x \cdot \overline{x} = 0 & x \oplus \overline{x} = 1 & \end{array}$$

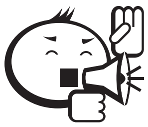
3.4 Алгебраические формы представления функций алгебры логики

Алгебраическая форма представления функций алгебры логики предусматривает запись функции в форме логического выражения, показывающего, какие логические операции и в какой последовательности должны выполняться над аргументами функции.

Логические выражения, представляющие собой дизъюнкции отдельных членов, каждый из которых, в свою очередь, есть некоторая функция, содержащая только конъюнкции и инверсии, называются *логическими выражениями дизъюнктивной формы*.

Дизъюнктивная форма представления булевой функции, в которой инверсия применяется лишь непосредственно к аргументам, но не к более сложным функциям от этих аргументов, называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)* представления функции.

Если каждый член дизъюнктивной нормальной формы булевой функции от L аргументов содержит *все L аргументов*, то такая форма представления называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)* булевой функции.



Логические выражения, представляющие собой конъюнкции отдельных членов, каждый из которых, в свою очередь, есть некоторая функция, содержащая только дизъюнкции и инверсии, называются *логическими выражениями конъюнктивной формы*.

По аналогии с дизъюнктивными формами различают *конъюнктивную нормальную форму (КНФ) и совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ)*.

Целесообразность записи функций в дизъюнктивной и конъюнктивных формах определяется исходя из характера задания функции.

Если произвольная булева функция от L аргументов задана перечислением всех наборов аргументов, обращающих ее в единицу, то для каждого из этих наборов составляют конституенту единицы с помощью конъюнкций и инверсий и затем образуют дизъюнкцию всех этих конституент. Конституенту единицы от всех L аргументов составляют по правилу: в каждом i-ом наборе L аргументов, которые обращают функцию в конституенту единицы, аргументы, равные нулю, записывают с инверсией, а аргументы, равные единице, — без инверсии. Например, для функции четырех аргументов $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 10)$ СДНФ имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x}_4.$$

Если произвольная булева функция от L аргументов задана перечислением всех наборов аргументов, обращающих ее в нуль, то для каждого из этих наборов составляют конституенту нуля с помощью дизъюнкций и инверсий и затем образуют конъюнкцию всех этих конституент. Конституенту нуля от всех L аргументов составляют по правилу: в каждом i-ом наборе L аргументом, которые обращают функцию в конституенту нуля, аргументы, равные единице, записывают с инверсией, а аргументы, равные нулю, — без инверсии. Например, для функции четырех аргументов $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$ СКНФ имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \overline{x}_2 + x_3 + \overline{x}_4)\,(\overline{x}_1 + x_2 + x_3 + \overline{x}_4).$$

Булева функция в СДНФ может быть получена на основе таблицы истинности. Чтобы осуществить переход от табличного представления функции к алгебраическому в СДНФ, каждому набору аргументов ставится в соответствие минтерм — конъюнкция всех аргументов, которые входят в прямом виде, если значение аргумента в данном наборе равно единице, либо в инверсном виде, если значение аргумента равно нулю. Для L аргументов составляются $q = 2^L$ минтермов: m_0, $m_1, \ldots, m_{q-1}$. Все минтермы функции двух переменных даны в табл. 3.2.

Алгебраическое выражение булевой функции F в СДНФ имеет вид [1]:

$$F = \sum_{i=0}^{q-1} f_i m_i \tag{3.6}$$

где f_i, m_i — значение функции и минтерм, соответствующие i-ому набору аргументов функции.

Таблица 3.2 – Минтермы и макстермы логической функции двух переменных

x_1	x_2	**Минтермы**	**Макстермы**	**Значения функции F**
0	0	$m_0 = \overline{x}_1\overline{x}_2$	$M_0 = x_1 + x_2$	1
0	1	$m_1 = \overline{x}_1 x_2$	$M_1 = x_1 + \overline{x}_2$	0
1	0	$m_2 = x_1\overline{x}_2$	$M_2 = \overline{x}_1 + x_2$	1
1	1	$m_3 = x_1 x_2$	$M_3 = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$	1

Используя формулу (3.6), получим выражение в СДНФ булевой функции, заданной в таблице 3.2, $(L = 2,\ q = 2^2 = 4)$:

$$F = \sum_{i=0}^{3} f_i m_i = 1 \cdot m_0 + 0 \cdot m_1 + 1 \cdot m_2 + 1 \cdot m_3 = m_0 + m_2 + m_3 = \overline{x}_1\overline{x}_2 + x_1\overline{x}_2 + x_1 x_2.$$

Для перехода от табличного представления функции к алгебраическому в СКНФ каждому набору аргументов ставится в соответствие макстерм — дизъюнкция всех аргументов, которые входят в прямом виде, если значение аргумента в данном наборе равно нулю, либо в инверсном виде, если значение аргумента равно единице. Для функции L переменных составляются $q = 2^L$ макстермов: $M_0, M_1, \ldots, M_{q-1}$. Между макстермами и минтермами существует вполне определенная связь (табл. 3.2), состоящая в том, что макстерм — это инверсия одноименного минтерма, а минтерм, в свою очередь, — инверсия одноименного макстерма:

$$M_i = \overline{m}_i, \qquad m_i = \overline{M}_i, \tag{3.7}$$

где $i = \overline{0, 2^L - 1}$.

Алгебраическое выражение булевой функции F в СКНФ имеет вид [1]:

$$F = \overline{\overline{\sum_{i=0}^{q-1} f_i m_i}} = \overline{\prod_{i=0}^{q-1} \overline{f_i m_i}} = \overline{\prod_{i=0}^{q-1} \left(\overline{f}_i + \overline{m}_i\right)} = \prod_{i=0}^{q-1} (f_i + \overline{m}_i) = \prod_{i=0}^{q-1} (f_i + M_i), \tag{3.8}$$

где f_i, M_i — значение функции и макстерм, соответствующие i-ому набору аргументов функции.

На основе формулы (3.8) получим выражение в СКНФ булевой функции, заданной в таблице 3.2 $(L = 2,\ q = 2^2 = 4)$:

$$F = \prod_{i=0}^{3} (f_i + M_i) = (1 + M_0)(0 + M_1)(1 + M_2)(1 + M_3) = M_1 = x_1 + \overline{x}_2.$$

Используя законы алгебры логики, нетрудно доказать эквивалентность полученных алгебраических выражений рассмотренной булевой функции в СДНФ и СКНФ:

$$F = \overline{x}_1\overline{x}_2 + x_1\overline{x}_2 + x_1x_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2 + x_1\overline{x}_2 + x_1\overline{x}_2 + x_1x_2 = \left(\overline{x}_1\overline{x}_2 + x_1\overline{x}_2\right) + \left(x_1\overline{x}_2 + x_1x_2\right) =$$
$$= \overline{x}_2\left(\overline{x}_1 + x_1\right) + x_1\left(\overline{x}_2 + x_2\right) = \overline{x}_2 + x_1 = x_1 + \overline{x}_2.$$

Если в выражениях (3.6) и (3.8) для функции F вместо значений функции f_i использовать их инверсии $\overline{f}_i$, то получатся СДНФ и СКНФ для функции $\overline{F}$, которая является инверсией заданной.

Следует отметить, что любая логическая функция L имеет единственные СДНФ и СКНФ.

3.5 Минимизация функций алгебра логики

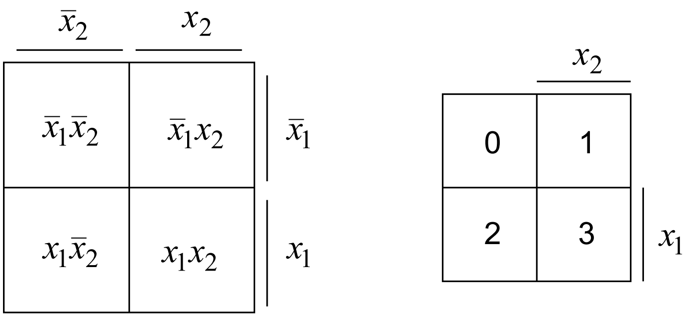
Под минимизацией функций алгебры логики понимают поиск алгебраического выражения булевой функции, которое содержит минимальное число символов логических переменных.

Один из подходов к решению задачи минимизации булевых функций состоит в использовании карт Карно (Karnaugh).

Карта Карно является координатным способом представления булевых функций. При этом способе задания таблица истинности функции представляется в виде координатной карты состояний, которая содержит 2^L клеток (по числу наборов значений аргументов булевой функции). Аргументы функции разбиваются на две группы так, что одна группа определяет координаты столбца карты, а другая — координаты строки. При таком способе построения каждая клетка определяется значениями аргументов, соответствующих определенному двоичному набору. Внутри каждой клетки карты Карно ставится значение функции на данном наборе.

Переменные в строках и столбцах располагаются так, чтобы соответствующие наборы значений аргументов образовывали циклический код Грея, тогда соседние клетки различаются только в одном разряде наборов значений аргументов.

Для функции двух аргументов (рис. 3.1, *а*): правая половина карты Карно соответствует зоне прямых значений, левая — зоне инверсных значений аргумента x_2; нижняя половина соответствует зоне прямых значений, верхняя — зоне инверсных значений аргумента x_1.



а *б*

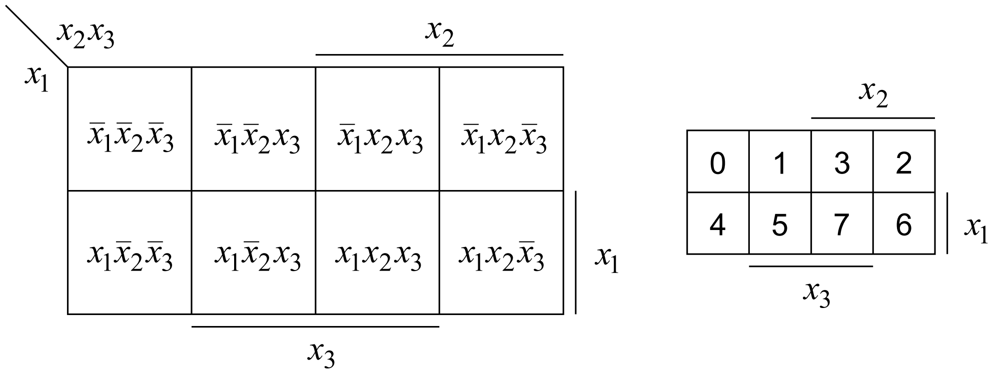
Рис. 3.1 – Карта Карно функции двух аргументов

Каждая клетка карты Карно соответствует минтерму, определяемому зонами, на пересечении которых она расположена. Левая верхняя клетка находится на пересечении зон инверсных значений аргументов x_1 и x_2, следовательно, соответствует минтерму $\bar{x}_1\bar{x}_2$. Правая верхняя клетка находится на пересечении зон прямых значений аргумента x_1 и инверсных значений аргумента x_2, следовательно, соответствует минтерму $x_1\bar{x}_2$.

По аналогии оставшиеся клетки соответствуют минтермам $\bar{x}_1 x_2$ и $x_1 x_2$.

На рис. 3.1, *б* приведена карта Карно для функции двух аргументов, в клетках которой указаны десятичные номера соответствующих наборов значений аргументов (строк таблицы истинности).

В карте Карно для функции трех аргументов (рис. 3.2, *а*) каждому минтерму также соответствует одна клетка, и, как и в случае карты Карно функции двух аргументов, алгебраическая запись минтермов строго соответствует системе размещения аргументов вокруг карты. На рис. 3.2, *б* представлена карта Карно функции трех аргументов, в клетках которой указаны номера наборов значений аргументов функции. Кроме того, на ней указаны только зоны прямых значений аргументов, а оставшаяся зона по каждой стороне карты Карно закреплена за инверсным значением соответствующего аргумента.



а *б*

Рис. 3.2 – Карта Карно функции трех аргументов

На рис. 3.3 представлены карты Карно функции четырех аргументов, в клетках которых указаны соответствующие минтермы и номера наборов значений аргументов.

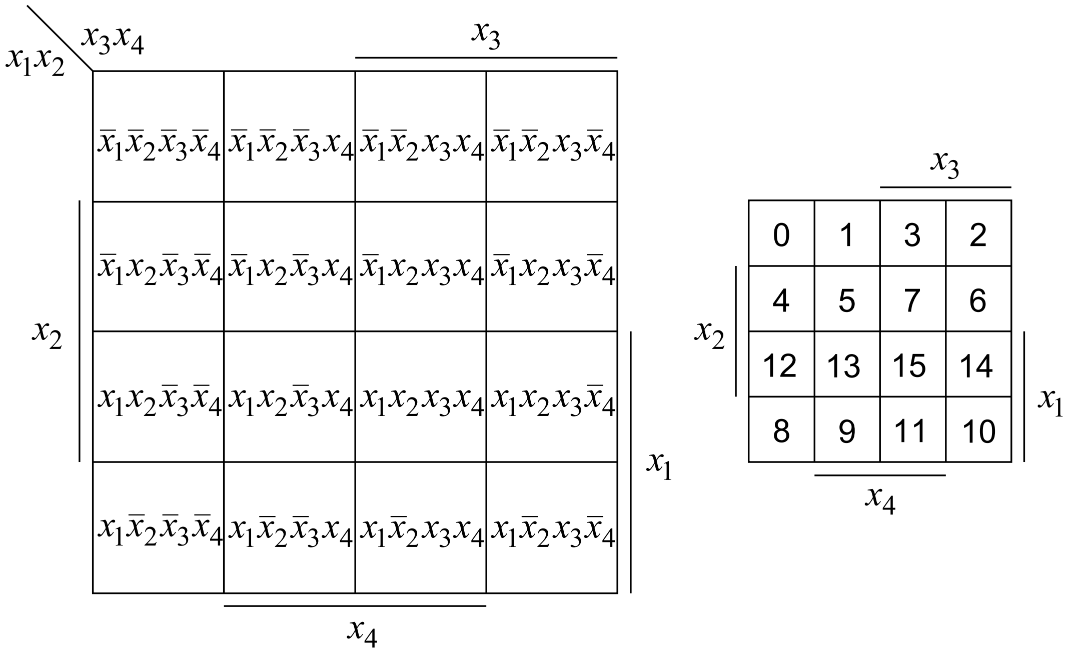


Рис. 3.3 – Карта Карно функции четырех аргументов

По аналогии можно строить карты Карно функций пяти аргументов и более. Так, для представления функции пяти аргументов необходимо использовать две карты четырех переменных, зеркально отображенных относительно центральной вертикальной линии (рис. 3.4).

x_1x_2 \ $x_3x_4x_5$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

					x_3	x_3	x_3	x_3	
			x_4	x_4	x_4	x_4			
	0	1	3	2	6	7	5	4	
	8	9	11	10	14	15	13	12	x_2
x_1	24	25	27	26	30	31	29	28	x_2
x_1	16	17	19	18	22	23	21	20	
		x_5	x_5			x_5	x_5		

Рис. 3.4 – Карта Карно функции пяти аргументов

Особенностью изображения карт Карно для числа переменных более четырех является то, что «математически» соседние столбцы карты Карно оказываются пространственно разнесенными. При этом столбцы одного цвета в правой и левой частях карты фактически оказываются соседними по аргументу x_3 (соседние столбцы указываются стрелками в нижней части карты).

Для представления на карте Карно булевой функции, записанной в СДНФ, необходимо ставить единицы в клетки, соответствующие наборам значений аргументов, на которых функция принимает значение 1.

Если функция является полностью определенной, то оставшиеся клетки заполняются нулями (либо не заполняются). Например, функции

$$f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3 \quad \text{или} \quad f(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 4, 7)$$

соответствует карта Карно (рис. 3.5).

		x_2	x_2		
		1	1		
1		1		x_1	
	x_3	x_3			

Рис. 3.5 – Карта Карно функции трех аргументов

Одно из достоинств карты Карно состоит в том, что на нее нетрудно нанести функцию, представленную не только в совершенной, но и в произвольной дизъюнктивной нормальной форме. Например, функции

$$f = x_1x_2 + \bar{x}_1x_3 + x_1\bar{x}_2x_3$$

соответствует карта Карно (рис. 3.6).

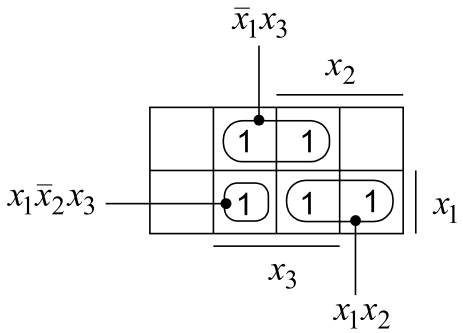


Рис. 3.6 – Карта Карно функции трех аргументов

а функции

$$f = x_1 + x_2x_3$$

соответствует карта Карно (рис. 3.7).

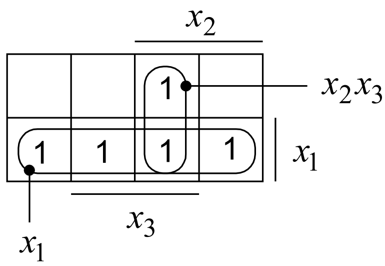


Рис. 3.7 – Карта Карно функции трех аргументов

В первом случае каждая конъюнкция, наносимая на карту, занимает новую область, не пересекающуюся с другими, а во втором — конъюнкция x_2x_3 частью занимает новую клетку, а частью — уже занятую. Отметим, что если в клетке уже стоит одна единица, то другие единицы ставить нет необходимости.

Для записи булевой функции в минимальной ДНФ используются следующие правила:

- *все клетки, содержащие* 1, *объединяются в замкнутые области;*
- *каждая область должна представлять собой прямоугольник, содержащий* 2^k *клеток, где* $k = 0, 1, 2, \ldots$;
- *области могут пересекаться, то есть одни и те же клетки могут входить в разные области;*
- *при охвате клеток карты замкнутыми областями следует учитывать, что клетки карты, для которых наборы значений аргументов различаются только в одном разряде, являются соседними (клетки, расположенные*

рядом по горизонтали и вертикали; клетки, расположенные на противоположных границах карты; клетки, расположенные зеркально относительно центральной вертикальной и горизонтальной линий);

- *при охвате клеток необходимо стремиться, чтобы число замкнутых областей было минимальным, а число входящих в область клеток — максимальным;*
- *выражение булевой функции записывается в виде дизъюнкции конъюнкций, соответствующих каждой области, причем ранг конъюнкции (число входящих в конъюнкцию аргументов) на k меньше, чем число n аргументов функции;*
- *аргумент не включается в конъюнкцию, если замкнутая область делится пополам областью прямых значений этого аргумента;*
- *аргумент включается в конъюнкцию в прямом виде, если замкнутая область лежит в области прямых значений этого аргумента, и в инверсном виде, если замкнутая область лежит в области его инверсных значений.*

Минимизированная ДНФ, полученная на основе наименьшей совокупности замкнутых областей, охватывающих клетки нулевых значений функции, представляет собой *минимизированное инверсное значение функции*.

Карты Карно позволяют минимизировать не только полностью определенные, но и частичные булевы функции. В этом случае в клетках карты, соответствующих логическим наборам, на которых функция не определена, будут записаны символы «х». В процессе упрощения булевой функции любую клетку, содержащую символ «х», можно считать либо единичной, либо нулевой, причем доопределение функции до единицы применяется, когда это позволяет уменьшить количество замкнутых областей или сократить ранг конъюнкции. Пример доопределения булевой функции представлен на рис. 3.8.

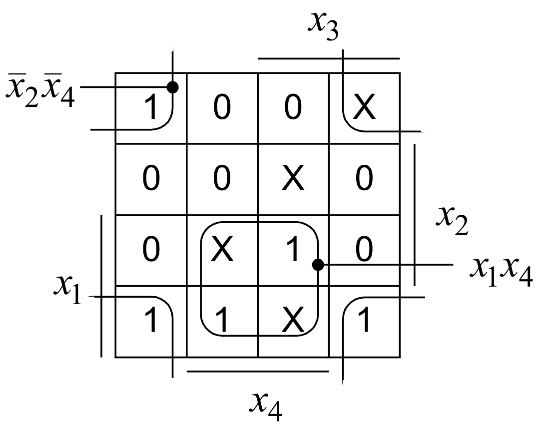
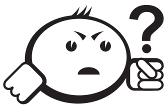


Рис. 3.8 – Карта Карно четырех переменных

Карту Карно можно построить для функции любого числа аргументов, однако на практике ограничиваются картами 5, реже 6 и уже совсем редко 7 и 8 аргументов, так как с увеличением числа аргументов быстро возрастет сложность карты и соответственно снижается эффективность ее использования.

Для минимизации булевых функций большого числа аргументов используют алгебраические методы (алгоритмы): метод упрощения, предложенный Квайном (Quine) и модифицированный Мак–Класки (McCluskey); методы Петрика, Рота, Блейка–Порецкого и др. Эти методы эффективны при минимизации достаточно сложных булевых функций с применением средств вычислительной техники.



Контрольные вопросы по главе 3

1) Записать дополнительные коды чисел 44 и (−44) в 8-разрядной вычислительной сетке.
2) Определить дополнительный код суммы, полученной при сложении дополнительных кодов чисел 33 и (−60) в 8-разрядной вычислительной сетке.
3) Записать двоично-десятичный код 8–4–2–1 десятичного числа 26.
4) Составьте таблицу истинности булевой функции $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.
5) Определить количество конституент нуля от 4 аргументов.
6) Укажите десятичные номера наборов значений аргументов x_1, x_2, x_3, x_4, на которых булева функция $f = (x_1 + x_2)(x_4 + \overline{x}_2) + \overline{x_3 + \overline{x}_1} + (\overline{x}_1 + x_3)(\overline{x}_2 + x_4)$ принимает единичные значения.
7) Нанесите на карту Карно булеву функцию $f = x_1 + x_2 x_3$.
8) Запишите минимизированное выражение булевой функции по карте Карно:

		x_2	x_2	
	1	1		
1	1	1	1	x_1
	x_3	x_3		

9) Запишите минимизированное выражение булевой функции по карте Карно:

			x_3	x_3	
	X	0	0	X	
	0	1	X	0	x_2
x_1	0	X	1	0	x_2
x_1	1	0	X	1	
		x_4	x_4		

10) Запишите алгебраические выражения булевой функции в СДНФ и СКНФ:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0